TD17

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

Exercice 1 **EDHEC** 2021 Exercice 1.

Soit la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x.y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Partie 1.

1. Justifier que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. **a.** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b. Déterminer les points critiques de f.

3. **a.** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b. Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.

4. Cet extremum est-il global.

Partie 2.

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x,1).$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x possède une unique solution que l'on notera u_n.

6. On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.

a. Dresser le tableau de variations de h^{-1}.

b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

c. En déduire en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\alpha}$.

Exercice 2 D'après **ECRICOME** 2007.

On considère, sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y).$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont on précisera la nature et la valeur.
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$f(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right).$$
   a. Montrer que pour tout $t > 0$, on a $f(t) \geqslant 1$.
   b. Vérifier que
$$g(x,y) = 1 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right).$$
   c. En déduire que l'extremum local est un extremum global de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 D'après **EML** 2011.
On considère les fonctions f et F définies par
$$f: \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+\ln(x))\, e^{x-1} \end{array} \quad \text{et} \quad F: \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x f(t)dt \end{array}$$

1. Étudier f.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $F'(x)$ à l'aide de $f(x)$.

On considère l'application de classe $\mathcal{C}^2$
$$G: \begin{array}{ccc}]0,+\infty[^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & F(x)+F(y)-2e^{\frac{x+y}{2}} \end{array}.$$

3. Pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, exprimer les dérivées partielles premières $\partial_1 G(x,y)$ et $\partial_2 G(x,y)$ à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $e^{\frac{x+y}{2}}$.
4. **a.** Montrer que f est bijective.
   b. Établir que, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si
$$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln(x) = e.$$
5. Montrer que l'équation $x + \ln(x) = e$ d'inconnue $x \in]0,+\infty[$ admet une unique solution, que l'on notera α et montrer que $1 < \alpha < e$.
6. En déduire que G admet comme unique point critique le point (α,α) et montrer que la matrice hessienne au point (α,α) s'écrit
$$H = \nabla^2(G)(\alpha,\alpha) = \begin{pmatrix} f'(\alpha) - \frac{e^\alpha}{2} & -\frac{e^\alpha}{2} \\ -\frac{e^\alpha}{2} & f'(\alpha) - \frac{e^\alpha}{2} \end{pmatrix} = f'(\alpha)\mathrm{I}_2 - \frac{e^\alpha}{2}M,$$
   où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
7. **a.** Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et X un vecteur propre de M associé à λ. Montrer que
$$HX = \left(f'(\alpha) - \frac{e^\alpha}{2}\lambda\right) X$$
   et en déduire que
$$\mathrm{Sp}(H) = \left\{f'(\alpha), f'(\alpha) - e^\alpha\right\}.$$
   b. Montrer que $f'(\alpha) > e^\alpha$.
   c. En déduire que G admet un extremum local et préciser sa nature.

Exercice 4 D'après **EDHEC** 2005.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = xe^{x(y^2+1)}.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. **a.** Déterminer les dérivées partielles premières de f.

b. En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.

3. **a.** Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

b. Montrer qu'effectivement f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.

4. **a.** Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \geqslant xe^x$.

b. En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question **2.b** est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.